

## ВЫБОР МОДЕЛИ ТЕЧЕНИЯ ЖИДКОСТИ ПРИ ПРОЕКТИРОВАНИИ ЛОПАСТНОЙ ГИДРАВЛИЧЕСКОЙ МАШИНЫ

*С. Д. Косторной, д-р техн. наук, профессор;*

*Н. С. Мартынова, канд. техн. наук,*

*Сумский государственный университет, г. Сумы, Украина*

*Обоснованная математическая модель течения жидкости в проточной части лопастной гидравлической машины (турбины или насоса) способствует развитию методов их проектирования и определения гидродинамических параметров для целенаправленного совершенствования энергетических, кавитационных и силовых характеристик на этапе проектирования, что значительно сокращает сроки выполнения технического задания и заменяет дорогостоящий физический эксперимент вычислительным.*

**Ключевые слова:** *математическая модель, проектирование гидравлических машин, обратная задача, прямая задача, потенциальное, сложно-слоистое, винтовое течения.*

*Обґрунтована математична модель течії рідини у проточній частині лопатевої гідравлічної машини (турбіни чи насоса) сприяє розвитку методів їх проектування і визначення гідродинамічних параметрів для цілеспрямованого вдосконалення енергетичних, кавітаційних і силових характеристик на етапі проектування, що значно скорочує строки виконання технічного завдання і замінює дорогий фізичний експеримент обчислювальним.*

**Ключові слова:** *математична модель, проектування гідравлічних машин, обернена задача, пряма задача, потенційна, складно-шарова, гвинтова течія.*

### 1. ВВЕДЕНИЕ

На современном этапе развития энергетического машиностроения при достигнутом уровне коэффициента полезного действия насосов порядка 70-90% дальнейшее повышение их эффективности в условиях рыночных отношений должно основываться на развитой теории и методах гидродинамических расчетов на базе ЭВМ. Полученные таким образом результаты могут быть использованы для целенаправленного изменения и дальнейшего совершенствования гидродинамических показателей насоса: энергетических и кавитационных характеристик, силовых нагрузок и нестационарных характеристик потока, что позволит заменить физический эксперимент вычислительным и сократить сроки достижения требуемых показателей.

Развиваемый новый теоретический подход к проектированию проточной части (ПЧ) гидравлических машин, который применительно к гидравлическим турбинам оказался успешным [1], в теории центробежных насосов (ЦБН) и заводской практике их создания является новым научным направлением.

### 2. ОБЩЕЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ О ПРЕОБРАЗОВАНИИ ЭНЕРГИИ ЖИДКОСТИ В ПРОТОЧНОЙ ЧАСТИ ЛОПАСТНЫХ ГИДРАВЛИЧЕСКИХ МАШИН

На основе фундаментального уравнения Эйлера для рабочего колеса насоса величина преобразованной в нем энергии, называемой теоретическим напором  $H_T$ , определяется выражением (1)

$$H_T = \omega(V_{u2}R_2 - V_{u1}R_1) = \frac{V_2^2 - V_1^2}{2} + \frac{W_1^2 - W_2^2}{2} + \frac{U_2^2 - U_1^2}{2}, \quad (1)$$

где  $V_1, V_2, W_1, W_2, U_1, U_2$  – соответственно абсолютная, относительная и окружная скорости потока на входе и выходе из рабочего колеса.

Роль центробежных и кориолисовых сил в рабочем процессе насоса в абсолютном, относительном и переносном движениях и их влияние на основной параметр – теоретический напор  $H_T$  в зависимости от геометрических и кинематических параметров рабочего колеса можно оценить следующим образом.

Учитывая свойство кориолисовых сил, определяемых выражением  $\vec{F} = 2\vec{\omega} \times \vec{W}$ , и центробежных сил, проходящих через ось вращения, выражение (1) можно представить в виде

$$H_T = H_{кор} + H_u = (U_2^2 - U_1^2) + (W_{2U}U_2 - W_{1U}U_1), \quad (2)$$

где первое слагаемое определяет величину энергии, передаваемую кориолисовыми силами инерции, а второе – циркуляционными. При введении относительных размеров геометрических и кинематических параметров ПЧ и выполнении соответствующих преобразований, доли энергии, передаваемых жидкости центробежным колесом посредством кориолисовых и циркуляционных сил будут [2]:

$$\frac{H_{кор}}{H_T} = h_{кор} = \frac{1 - \bar{D}_1^2}{K_Z(1 - q) - \varphi \bar{D}_1^2}, \quad (3)$$

$$\frac{H_u}{H_T} = h_u = 1 - \frac{1 - \bar{D}_1^2}{K_Z(1 - q) - \varphi \bar{D}_1^2}, \quad (4)$$

где  $\varphi = \frac{V_{1u}}{U_1}$  – относительная закрутка потока на входе в центробежное колесо;

$K_Z = \frac{H_T}{H_{T\infty}}$  – коэффициент влияния конечного числа лопаток;

$q = (V_{2m}/U_2) \operatorname{ctg} \beta_{2л}$  – расходный параметр.

Так как центробежные силы проходят через ось вращения и не создают момента относительно оси, а кориолисовы силы перпендикулярны скорости относительного движения и силе трения, то эти силы не оказывают влияния на процесс преобразования энергии жидкости. Следовательно, изменение энергии жидкости от этих сил не происходит. Поэтому можно считать, что вязкость жидкости и центробежные силы не влияют на величину потерь энергии. Таким образом, на основе выражения (2) можно считать, что эффективность передачи энергии рабочим колесом центробежного типа выше, чем осевого, для которого  $u_2 = u_1 = u$ ,  $H_{кор} = 0$ , и поэтому вся величина теоретического напора может создаваться только вследствие циркуляционного обтекания реальной жидкостью.

На основе приведенных упрощенных теоретических объяснений можно сделать ориентировочные предварительные оценки геометрическим и кинематическим параметрам ПЧ при проектировании рабочих колес и объяснить целесообразность выбора различных методов проектирования быстроходных и тихоходных гидравлических машин. Объективный многолетний опыт проектирования насосов, представленный рис.1, подтверждает сказанное и объясняет, почему тихоходные машины

проектируются преимущественно приближенными методами конформных отображений, а быстроходные аналитическими методами гидродинамических особенностей. Так, из формул (3) и (4) видно, что значения  $h_{кор}$  и  $h$  определяются  $\bar{D}_1$ ,  $q$  и  $\varphi$  (значение  $K_Z$  можно принять постоянным). Отношение  $\bar{D}_1 = 1$  соответствует осевому колесу, удельная работа которого  $H_T$  создается только циркуляционными силами:  $h_u = 1$ ;  $h_{кор} = 0$ . Поэтому для таких насосов профилирование лопасти должно выполняться методами, которые бы позволяли в процессе проектирования обеспечить циркуляционное обтекание с требуемым распределением скорости по контуру обтекаемого тела и угла натекания на лопасть.

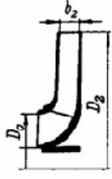
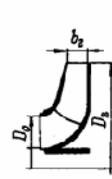
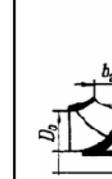
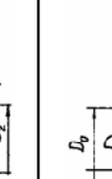
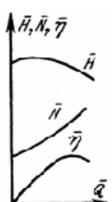
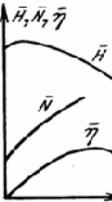
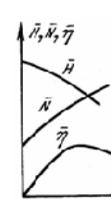
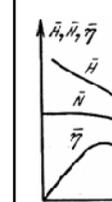
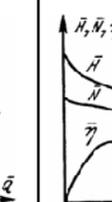
Наименование лопастных насосов	ЦЕНТРОБЕЖНЫЕ			ПОЛУОСЕВЫЕ (диагональные)	ОСЕВЫЕ (пролеплярные)
	Тихоходные	Нормальные	Быстроходные		
Коэффициент быстроходности	$50 < n_S < 80$	$80 < n_S < 150$	$150 < n_S < 300$	$300 < n_S < 600$	$600 < n_S < 1200$
Эскиз сечения рабочего колеса					
	$\frac{D_2}{D_0} \approx 2,5$	$\frac{D_2}{D_0} \approx 2$	$\frac{D_2}{D_0} \approx 1,8 \div 1,4$	$\frac{D_2}{D_0} \approx 1,2 \div 1,1$	$\frac{D_2}{D_0} \approx 0,8$
Характеристика рабочего колеса					
Метод проектирования	Метод конформных отображений	Метод конформных отображений	Аналитические методы расчета	Аналитические методы расчета	Аналитические методы расчета

Рисунок 1

В случае центробежных насосов с  $\bar{D}_1 > 0,5 - 0,6$  может иметь место передача энергии жидкости, когда  $h_u > 0$  и  $h_{кор} > 0$ , т.е. удельная работа создается как кориолисовыми, так и циркуляционными силами. Для таких насосов профилирование лопаток рабочего колеса и обеспечение благоприятных углов атаки уже имеет существенное значение, а в случае, когда  $H_T = h_{кор}$ , профиль лопатки рабочего колеса может быть выполнен упрощенными приближенными методами конформных отображений.

Увеличение относительной циркуляции потока перед центробежным колесом приводит к уменьшению доли энергии, передаваемой силами циркуляционного обтекания и увеличивает ее кориолисовыми силами.

Поэтому такой практический прием часто приводит к желаемому результату при немодельных изменениях рабочего колеса.

Хотя поток, протекающий в ПЧ, имеет сложную пространственную структуру и течение жидкости в общем виде поддается математическому описанию уравнениями вязкой жидкости Навье–Стокса, на практике пока не представляется возможным провести достаточно точный гидродинамический расчет пространственного течения жидкости как во всей машине в целом, так и в ее отдельных элементах. Причиной этого является отсутствие доказательства справедливости этих уравнений и единственности их решения, а также уровень развития численных методов расчета и вычислительной техники. Поэтому практические потребности инженерных расчетов трехмерных течений в элементах гидравлических машин ограничиваются введением ряда упрощений и используются модели течений, расчет которых находится в пределах возможных вычислительных алгоритмов.

### 3. ИСХОДНЫЕ УРАВНЕНИЯ ТЕЧЕНИЯ ЖИДКОСТИ В ПЧ

В ортогональной криволинейной системе координат  $q_1, q_2, q_3$  (рис.2) стационарный поток, когда каждая проекция вектора скорости  $V_1, V_2, V_3$  зависит от трех координат  $V_1 = f_1(q_1, q_2, q_3); V_2 = f_2(q_1, q_2, q_3); V_3 = f_3(q_1, q_2, q_3)$  и называемый трехмерным трехпараметрическим, заменяется потоком идеальной жидкости, отнесенным к такой же координатной системе, но все три компоненты скорости являлись бы функциями двух координат  $q_1, q_2$  и не зависели от третьей  $q_3$ , который называют трехмерным дупараметрическим. В этом случае

$$V_1 = f_1(q_1, q_2); V_2 = f_2(q_1, q_2); V_3 = f_3(q_1, q_2). \quad (5)$$

Геометрически это означает, что на всех координатных поверхностях  $q_3 = const$  поле скоростей строится одинаковым образом по отношению к триэдру единичных векторов  $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$   $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$  координатной системы (рис.2).

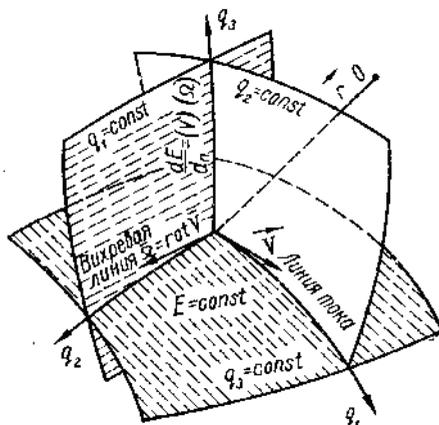


Рисунок 2 - Криволинейная ортогональная система координат

В ПЧ ЦБН, работающего с числом оборотов в минуту, равным 1500, что соответствует 25 оборотам в секунду, при проектировании и оценке проектного решения течение принимается осесимметричным, вихревым, поле скоростей которого одинаково на каждой плоскости, проходящей

через некоторую ось, но векторы скоростей необязательно лежат в этих плоскостях.

При проектировании гидравлических машин дифференциальные уравнения течения жидкости осредняют по окружной координате и рассматривают двухпараметрическое течение идеальной жидкости, которое принимают в качестве исходного при решении обратной задачи [3]. В рамках такого подхода выражение (5) равносильно следующему условию:

$$\frac{\partial V_1}{\partial q_3} = \frac{\partial V_2}{\partial q_3} = \frac{\partial V_3}{\partial q_3} = 0, \quad (6)$$

которое соответствует тому, что функциональный определитель от составляющих скорости по координатам тождественно равен нулю в силу основных свойств определителей. Из условия (6) следует, что между функциями  $V_1, V_2, V_3$  существует соотношение, не зависящее от переменных  $q_1, q_2, q_3$ , т.е. в двухпараметрическом потоке одна из составляющих скорости связана с двумя другими функциональной зависимостью [1]

$$V_3 = f(V_1, V_2). \quad (7)$$

Полученный теоретический результат для двухпараметрического потока, когда одна из составляющих скорости связана с двумя другими функциональной зависимостью, приводит к новой постановке обратной задачи, которая состоит в том, что меридиональный или циркуляционный поток при решении обратной задачи не может задаваться произвольно, как это принято [3]. Составляющие скорости  $\vec{V}$  уравнения (7) по единичным векторам  $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$  обозначим  $V_1, V_2, V_3$ , а составляющие угловой скорости вихря  $\vec{\Omega}$  по тем же направлениям –  $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$ . В общем случае  $\vec{\Omega} = \text{rot} \vec{V} = \vec{e}_1 \Omega_1 + \vec{e}_2 \Omega_2 + \vec{e}_3 \Omega_3$ .

Если для системы координат принять условия, аналогичные (6),

$$\frac{\partial H_1}{\partial q_3} = \frac{\partial H_2}{\partial q_3} = \frac{\partial H_3}{\partial q_3} = 0, \quad (8)$$

геометрический смысл которых состоит в том, что на каждой поверхности  $q_3 = \text{const}$ , нормаль к ней имеет во всех точках одно и то же направление, т.е. координатные поверхности  $q_3 = \text{const}$  являются плоскостями. Поверхности  $q_1 = \text{const}$  и  $q_2 = \text{const}$  зависят от  $q_2$  или  $q_1$  и являются поверхностями вращения, на которых меридианными линиями также являются линии  $q_3 = \text{const}$ ,  $q_1 = \text{const}$  или  $q_2 = \text{const}$ . Из сказанного следует, что семейство поверхностей  $q_3 = \text{const}$  представляет собой пучок плоскостей, причем ось пучка является общей осью ортогональных поверхностей вращения  $q_1 = \text{const}$  и  $q_2 = \text{const}$  [4]. Вводя принятые условия (6) и (8) в уравнения для вихря и неразрывности, получим для двухпараметрического вихревого потока выражения для составляющих вихря и уравнения неразрывности, идентичные случаю осесимметричного течения, когда компоненты вихря также не зависят от координаты  $q_3$ . При этом в уравнении неразрывности вместо трех членов останется два. Например, если взять дифференциальное уравнение линий

тока на поверхностях  $q_3 = const$ :  $\frac{H_1 dq_1}{V_1} = \frac{H_2 dq_2}{V_2}$ , а уравнение

непрерывности в виде  $\frac{\partial}{\partial q_1}(H_2 H_3 V_1) = \frac{\partial}{\partial q_2}(-H_3 H_1 V_2)$ , тогда  $H_3$  служит

интегрирующим множителем уравнения линии тока, левая часть которого после умножения на  $H_3$  является выражением полного дифференциала функции тока  $\psi$ , в котором

$$d\psi = \frac{\partial \psi}{\partial q_1} dq_1 + \frac{\partial \psi}{\partial q_2} dq_2, \quad H_2 H_3 V_1 = \frac{\partial \psi}{\partial q_2}, \quad H_3 H_1 V_2 = -\frac{\partial \psi}{\partial q_1}. \quad (9)$$

Если условия (9) удовлетворяются полностью, то  $\psi = \psi(q_1, q_2)$ . Функцию  $\psi$ , как это принято для двумерных потоков, называют функцией тока. Функция тока двумерного потока определяет все поле скоростей, а функция тока двухпараметрического потока определяют лишь две из трех компонент скорости. После предварительного анализа дифференциальные уравнения двухпараметрического стационарного потока в форме Громека–Ламба в векторной форме имеют следующий вид:

$$\vec{\Omega} \times \vec{V} = -\text{grad } E. \quad (10)$$

Введя в уравнение (10) условия (6) и (8), получим, что  $E$  не зависит от  $q_3$ , а распределение энергии  $E$  в потоке подчиняется такому же условию, как и компоненты скорости двухпараметрического потока.

Поэтому соотношение  $V_1 \Omega_2 - V_2 \Omega_1 = 0$  или  $\frac{\Omega_1}{V_1} = \frac{\Omega_2}{V_2}$  будет означать, что

на координатной поверхности  $q_3 = const$  составляющая вихря параллельна составляющей скорости. Подставляя в это уравнение функцию тока, получим  $\frac{\partial(H_3 V_3)}{\partial q_1} \frac{\partial \psi}{\partial q_2} - \frac{\partial(H_3 V_3)}{\partial q_2} \frac{\partial \psi}{\partial q_1} = 0$ , т. е.

функциональный определитель от произведения  $H_3 V_3$  и функции тока

$\psi$ :  $\frac{\partial(H_3 V_3, \psi)}{\partial q_1 \partial q_2} = 0$ . Из этого тождества следует, что между произведением

$H_3 V_3$  и функцией тока  $\psi$  существует соотношение, не зависящее от переменных  $q_1, q_2$ :

$$H_3 V_3 = \Phi(\psi), \quad (11)$$

где  $\Phi(\psi)$  – произвольная функция, которая соответствует выражению (7).

Умножив уравнения (10) соответственно на  $V_1, V_2, V_3$  и сложив их, при сделанных предположениях относительно энергии, составляющих скорости и коэффициентов Лямэ сумма правых частей уравнений с

соответствующими множителями обращается в нуль:  $\frac{V_1}{H_1} \frac{\partial E}{\partial q_1} + \frac{V_2}{H_2} \frac{\partial E}{\partial q_2} = 0$ .

Из этого уравнения следует, что  $\frac{\partial E}{\partial q_1} \frac{\partial \psi}{\partial q_2} - \frac{\partial E}{\partial q_2} \frac{\partial \psi}{\partial q_1} = 0$ , или  $\frac{\partial(E, \psi)}{\partial q_1 \partial q_2} = 0$ .

Таким образом, между запасом энергии единицы массы жидкости и функцией тока  $\psi$  также существует функциональная зависимость без посредства  $q_1$  и  $q_2$  в следующем виде:

$$E = -F(\psi), \quad (12)$$

где  $F(\psi)$  – произвольная функция.

Из уравнения (10) при помощи полученных соотношений можно получить выражение для дифференциала энергии, устанавливающего связь между функциями  $\psi$  и  $\Phi$ , приравняв его дифференциалу  $dE = -F(\psi) d\psi$ ,

$$\frac{\partial}{\partial q_1} \left( \frac{H_2}{H_3 H_1} \frac{\partial \psi}{\partial q_1} \right) + \frac{\partial}{\partial q_2} \left( \frac{H_1}{H_2 H_3} \frac{\partial \psi}{\partial q_2} \right) + \frac{H_1 H_2}{H_3} \cdot \Phi(\psi) \cdot \Phi'(\psi) + H_1 H_2 H_3 F'(\psi) = 0. \quad (13)$$

Полученные уравнения при сделанных предположениях вполне заменяют собой исходную систему Эйлера.

Отметим, что уравнение (13) в системе является ее основным уравнением. Оно показывает, что в выбранной системе ортогональных криволинейных координат решение задачи о двухпараметрическом вихревом движении невязкой жидкости при дополнительном предположении (12) относительно распределения энергии приводится к решению уравнения в частных производных второго порядка эллиптического типа, в общем случае – нелинейного.

Это уравнение связывают три функции: функцию тока  $\psi$ , функцию  $\Phi(\psi)$ , выражающую закон изменения компоненты  $V_3$ , и функцию  $F(\psi)$ , выражающую закон распределения энергии. Две из этих трех функций являются произвольными. Наиболее рациональным путем решение задачи будет следующий: назначить произвольно функции  $\Phi(\psi)$  и  $F(\psi)$ , а искать функцию  $\psi$ ; тогда математически задача сведется к интегрированию одного уравнения в частных производных. Если  $\Phi(\psi) = 0$ , то какова бы ни была функция  $F(\psi)$ , линии тока лежат на поверхностях  $q_3 = const$ .

Таким образом, установившийся двухпараметрический вихревой поток невязкой жидкости в рассмотренной координатной системе определяется следующей системой уравнений [5]:

$$\left. \begin{aligned} H_2 H_3 V_1 &= \frac{\partial \psi}{\partial q_2}, H_3 H_1 V_2 = \frac{\partial \psi}{\partial q_1}; \\ H_3 V_3 &= \Phi(\psi); \\ E &= -F(\psi); \\ \frac{\partial}{\partial q_1} \left( \frac{H_2}{H_3 H_1} \frac{\partial \psi}{\partial q_1} \right) + \frac{\partial}{\partial q_2} \left( \frac{H_1}{H_2 H_3} \frac{\partial \psi}{\partial q_2} \right) + \frac{H_1 H_2}{H_3} \cdot \Phi(\psi) \cdot \Phi'(\psi) + H_1 H_2 H_3 F'(\psi) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

#### 4. КИНЕМАТИЧЕСКОЕ УСЛОВИЕ РАЗВИТИЯ ВИНТОВОГО ТЕЧЕНИЯ

Особенности двухпараметрического потока для ответа на предпочтительную модель течения жидкости в ПЧ будем характеризовать тремя системами кривых линий: траекториями, линиями тока и

вихревыми линиями. Для этого представим вектор вихря в виде суммы двух векторов

$$\bar{\Omega} = \Omega_\tau + \Omega_n = \left( \frac{\bar{V} \cdot \bar{\Omega}}{V \cdot V} \right) \bar{V} + \frac{\bar{V} \times (\bar{\Omega} \times \bar{V})}{\bar{V} \cdot \bar{V}},$$

где  $\Omega_\tau$  и  $\Omega_n$  - проекция вектора вихря по линии тока и нормали к ней.

Так как  $div \bar{\Omega} = 0$ ,  $div \bar{V} = 0$ ,  $\bar{V} \cdot \bar{V} = V^2$ , а

$$-\bar{V} grad \left( \frac{V \cdot \Omega}{V^2} \right) = div \left[ \frac{V \times (V \times \bar{\Omega})}{V^2} \right], \quad (15)$$

уравнение (15) запишем в виде скорости развития винтового течения

$$\frac{\partial}{\partial \zeta} \left( \frac{\Omega_\tau}{V} \right) = -\frac{1}{V} div \left[ \frac{V \times (\Omega \times V)}{V^2} \right]. \quad (16)$$

Чтобы увязать изменение величины  $\frac{\Omega_\tau}{V}$  вдоль линии тока с е геометрическими параметрами, преобразуем правую часть уравнения (16)

$$\begin{aligned} -div \left[ \frac{\bar{V} \times (\bar{\Omega} \times \bar{V})}{V^2} \right] &= div \left[ \frac{\bar{V} \times (\bar{V} \times \bar{\Omega})}{V^2} \right] = \\ &= \bar{V} \times (\bar{V} \times \bar{\Omega}) grad \left[ \frac{1}{V^2} \right] + \frac{1}{V^2} div \left[ \bar{V} \times (\bar{V} \times \bar{\Omega}) \right]. \end{aligned} \quad (17)$$

Далее

$$div \left[ V \times (V \times \Omega) \right] = (\bar{V} \times \bar{\Omega}) rot \bar{V} - \bar{V} \cdot rot (\bar{V} \times \bar{\Omega}) = \bar{V} \cdot rot (\bar{V} \times \bar{\Omega}). \quad (18)$$

В свою очередь,

$$grad \left[ \frac{1}{V^2} \right] = \frac{grad \bar{V} \cdot \bar{V}}{V^4} = -2 \left[ \frac{(\bar{V} \cdot \nabla) \bar{V} + \bar{V} \cdot rot \bar{V}}{V^4} \right]. \quad (19)$$

Подставляя (16), (17) и (18) в (19), получим выражение

$$\bar{V} \cdot grad \left[ \frac{\Omega_\tau}{V} \right] = -\frac{2}{V^4} \left[ \bar{V} \times (\bar{V} \times \bar{\Omega}) \right] (\bar{V} \cdot \nabla) \cdot \bar{V} - \frac{\bar{V}}{V^2} rot (\bar{V} \times \bar{\Omega}), \quad (20)$$

в котором учтено, что  $\left[ V \times (V \times \Omega) \right] \cdot \left[ V \cdot rot \bar{V} \right] = 0$ .

Если учесть, что  $(\bar{V} \cdot \nabla) \bar{V}$  представляет собой ускорение установившегося движения жидкости, которое состоит из касательной  $a_\tau \cdot \bar{\tau}$  и нормальной  $a_n \cdot \bar{n} = \frac{V^2}{r} \bar{n}$  составляющих, где  $\bar{\tau}$  и  $\bar{n}$  - единичные векторы касательной и главной нормали к линии тока;  $a_\tau$  - величина касательного ускорения,  $r$  - радиус кривизны линии тока.

Таким образом,

$$(\bar{V} \cdot \nabla) \bar{V} = a_r \bar{\tau} + \frac{V^2}{r} \bar{n}$$

и далее получим

$$\begin{aligned} -\frac{2}{V^4} [\bar{V} \times (\bar{V} \times \bar{\Omega})] \cdot \left( a_r \bar{\tau} + \frac{V^2}{r} \bar{n} \right) &= -\frac{2}{V^2 r} [\bar{V} \times (\bar{V} \times \bar{\Omega})] \cdot \bar{n} = \\ &= -\frac{2}{V \cdot r} [\bar{\tau} \times (\bar{V} \times \bar{\Omega}) \bar{n}] = \frac{2}{V \cdot r} \cdot \bar{b} \cdot (\bar{V} \times \bar{\Omega}) = \frac{2\Omega_n}{r}, \end{aligned} \quad (21)$$

где  $\Omega_n$  – величина вихря по главной нормали.

Подставляя выражение (21) в уравнение (20), получим

$$\bar{V} \cdot \text{grad} \left( \frac{\Omega_r}{V} \right) = \frac{2\Omega_n}{r} - \frac{\bar{V}}{V^2} \text{rot} [\bar{V} \times \bar{\Omega}],$$

или

$$\frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{\Omega_r}{V} \right) = \frac{2\Omega_n}{V \cdot r} - \frac{\bar{\tau}}{V^2} \text{rot} (\bar{V} \times \bar{\Omega}). \quad (22)$$

Уравнение (22) представляет собой кинематическое решение, выражающее изменение вихря по потоку в направлении течения при установившемся движении через компоненту вихря по главной нормали и величину ротора Громеки–Ламба по направлению течения. Оно показывает, что  $\frac{\Omega_r}{V}$  может развиваться не только вследствие неравномерного поля скоростей, которое выражено величиной  $\Omega_n$ , но и когда  $\bar{\tau} \cdot \text{rot} [\bar{V} \times \bar{\Omega}]$  не обращается в нуль, даже в случаях, когда линии тока прямолинейные.

Чтобы учесть влияние вязкости на развитие винтового течения, выразим вектор  $\text{rot} (\bar{V} \times \bar{\Omega})$  из уравнения движения жидкости. Для стационарного движения вязкой жидкости имеем уравнение Навье–Стокса

$$\bar{V} \times \bar{\Omega} = \text{grad} \left( \frac{p}{\rho g} + \frac{V^2}{2g} + U \right) - \nu \nabla^2 \bar{V}. \quad (23)$$

Применив операцию ротора к (23), получим

$$\text{rot} (\bar{V} \times \bar{\Omega}) = -\nu \nabla^2 \bar{\Omega}. \quad (24)$$

Подставив значение  $\text{rot} (\bar{V} \times \bar{\Omega})$  из (24) в (22) получим выражение для изменения  $\frac{\Omega_r}{V}$  вдоль линии тока в вязкой жидкости.

$$\frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{\Omega_r}{V} \right) = \frac{2\Omega_n}{V \cdot r} + \nu \frac{\nabla^2 \Omega_r}{V^2}. \quad (25)$$

Уравнение (25), справедливое в общем случае стационарного движения жидкости, может быть использовано для развития винтового течения, как в идеальной, так и в вязкой жидкости.

Выражение  $\frac{2\Omega_n}{V \cdot r}$  характеризует взаимодействие кривизны линии тока и градиента неравномерной скорости. Его можно рассматривать как «источник» направленной по потоку завихренности  $\Omega_r$ . Влияние вязкости сводится к отводу или диссипации  $\Omega_r$ . Поэтому вязкость, будучи диссипативной, не может сама по себе создавать дополнительную закрутку или противотоки, хотя и является причиной резкого градиента скорости. В общем случае течения жидкости величина

$$\frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{\Omega_r}{V} \right) = \frac{1}{V} \operatorname{div} \left[ \frac{\bar{V} \times (V \times \Omega)}{V^2} \right] \text{ равняется нулю лишь при условиях}$$

$$\text{а) } \bar{\Omega} \times \bar{V} = 0 \quad (26)$$

$$\text{б) } \bar{\Omega} \cdot \bar{V} = 0. \quad (27)$$

Для квазипотенциального потока уравнение (27) в случае осесимметричного движения жидкости в криволинейной системе координат  $q_1, q_2, q_3$  (рис. 2) имеет вид

$$\frac{V_1}{H_2 H_3} \frac{\partial (H_3 V_3)}{\partial q_2} - \frac{V_2}{H_1 H_3} \frac{\partial (H_3 V_3)}{\partial q_1} + \frac{V_3}{H_1 H_2} \left[ \frac{\partial (H_2 V_2)}{\partial q_1} - \frac{\partial (H_1 V_1)}{\partial q_2} \right] = 0, \quad (28)$$

и если учесть, что в выбранной системе координат ось  $q_1$  совпадает с линией тока, тогда  $V_1 = V_m$ ,  $V_3 = V_u$ ,  $H_3 = r$ ,  $V_2 = 0$ . В этом случае уравнение (28) будет иметь вид

$$H_1 V_m \frac{\partial (V_u r)}{\partial q_2} + V_u r \left( - \frac{\partial (H_1 V_m)}{\partial q_2} \right) = 0. \quad (29)$$

Решая полученное дифференциальное уравнение, получим выражение

$$V_u r = \psi(q_1), \quad (30)$$

где  $\psi(q_1)$  – произвольная постоянная функция  $q_1$ .

Для определения функции  $\psi(q_1)$  примем, что на исходной линии тока (например, линии тока «А») величина  $V_u r$  известна как граничное условие. Из (30) получим закон изменения  $V_u r$  на соседней линии тока «В» и на всех остальных.

$$(V_u r)_B = \frac{(V_u r)_A}{(H_1 V_m)_A} (H_1 V_m)_B,$$

где  $(V_u r)_A$  – заданная функция;  $H_1$  – коэффициент Лямэ.

## ВЫВОДЫ

Так как для винтового и потенциального потоков  $V_{\omega}r$  не изменяется вдоль линии тока, то ее нужно принимать для отводящих и подводящих элементов ПЧ, а форму сложнослоистого течения (27), удовлетворяющего уравнению Эйлера (1), следует принимать при проектировании РК.

## SUMMARY

### CHOICE OF MODEL OF FLUID FLOW AT ENGINEERING OF BLADE HYDRAULIC MACHINE

*Kostornoy S. D., Martynova N. S.*

*Sumy State University, Sumy, Ukraine*

*The well-founded mathematical model of a current of a liquid in the setting of the blade hydraulic machine (the turbine or the pump) promotes development of methods of their engineering and definition of hydrodynamic parameters for purposeful perfection of power, cavitations and power characteristics at a design stage that considerably divides out due dates of the technical project and replaces expensive physical experiment computing.*

**Key words:** *mathematical model, engineering of hydraulic machines, inverse problem, direct problem, potential, is complex-layered, screw currents.*

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Косторной С. Д., Построение лопасти радиально-осевой турбины в осесимметричном потоке. Сб. «Гидравл. Машины». – Харьков, 1968. - Вып. 2. – С.116-122.
2. Овсянников Б. В. К вопросу о передаче энергии в центробежных и осецентробежных насосах циркуляционными и кориолисовыми силами / Б. В. Овсянников, Б. И. Боровский // Известия вузов, серия «Авиационная техника». – 1966. – № 4. – С. 107-113.
3. Этинберг И. Э, Раухман Б. С., Гидродинамика гидравлических турбин. – Л.: Машиностроение, 1978. - 280 с.
4. Громека И. С., Собрание сочинений. - М.: Изд. АН СССР, 1952.
5. Васильев О. Ф., Основы механики винтовых и циркуляционных потоков. – М. -Л.: Госэнергоиздат, 1958.

*Поступила в редакцию 11 ноября 2011 г.*